Capítulo 2

MAGNETOSTÁTICA EN LA MATERIA.

2.1 Introducción:

En el capitulo anterior consideramos el campo magnético producido por la llamada corriente eléctrica libre; para mantener la consistencia, los fenómenos magnéticos en la materia se consideran debidos a las llamadas "corrientes ligadas" a escala molecular/atómica, explicables por el modelo atómico de Bohr. La manifestación material más importante del magnetismo (el ferromagnetismo) sólo puede explicarse correctamente dentro del marco de la Física del Estado Sólido y la Mecánica Cuántica.

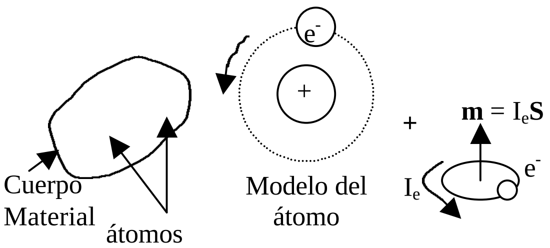


Fig. 2.1a

m: momento dipolar magnético equivalente, llamado momento magnético orbital de un electrón.

$$I_e = \frac{\text{Carga eléctrica}}{\text{Periodo de Revolución}}$$

S = área cerrada por la órbita.

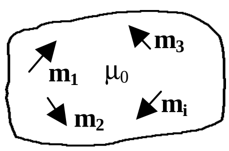


Fig 2.1b Cuerpo material modelado como una región vacía conteniendo dipolos magnéticos.

2.2 Vector Magnetización:

Para cuantificar este modelo se define una magnitud vectorial llamada Magnetización (**M**); su definición matemática es la siguiente:

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{m}_i}{\Delta V} \qquad (2.1)a$$

Donde: $\Delta V \to 0$, se debe entender en sentido macroscópico. Es decir que ΔV es pequeño en comparación con el volumen del cuerpo pero grande comparado con las moléculas/átomos (modelo macroscópico)

Luego: $d\mathbf{m} = \mathbf{M} dv$ (2.1)b

Unidades Amperio/metro

2.3 Potencial Vectorial en la Materia:

El potencial diferencial d**A** en el punto P es:

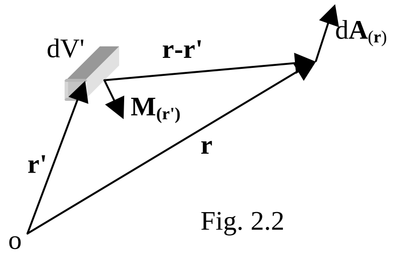


Fig. 2.2

$$d\mathbf{A}_{(\mathbf{r})} = \frac{m_0 d\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4p\,|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{m_0 d\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{4p\,R^3},$$

$$d\mathbf{A}_{(\mathbf{r})} = \frac{m_0 \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \times \mathbf{R}\, dV'}{4p\,R}$$

Si el cuerpo tiene un volumen total V:

$$\mathbf{A}_{(\mathbf{r})} = \frac{m_o}{4p} \int_V \frac{\mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \times \mathbf{R}\, dV'}{4p\,R} \qquad (2.2)$$

Para que esta expresión sea consistente con los resultados del capítulo anterior se transforma la ec. (2.2) así:

$$\mathbf{A}_{(\mathbf{r})} = \frac{m_0}{4p} \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}_{(\mathbf{r}')} dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{m_0}{4p} \oint_S \frac{\mathbf{M}_{(\mathbf{r}')} \times \mathbf{n}\, dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \qquad (2.3)$$

Siendo S la frontera de V, comparando la ec. (2.3) con las ec. (1.11)a y b observamos que:

i) $\nabla \times \mathbf{M}_{(\mathbf{r}')}$, hace el papel de una densidad volumétrica de corriente

ii) $\mathbf{M}_{(\mathbf{r}')} \times \mathbf{n}$, hace el papel de una densidad superficial de corriente.

Luego, definimos:

$$\mathbf{J}_\mathbf{M} = \nabla \times \mathbf{M} \qquad (2.4)$$

Como densidad volumétrica de corriente de magnetización

$$\mathbf{J}_\mathbf{SM} = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \qquad (2.5)$$

Como densidad superficial de corriente de magnetización.

En consecuencia **B** se calcula igual que en el capitulo 1, ec. (1. 7) y (1.8) (Ver aplicaciones)

2.4 Potencial Escalar en la materia:

Igual que en sección 2.3 usamos los conceptos del capítulo 1 y la ec. (2.2).

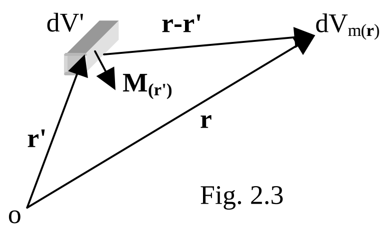


Fig. 2.3

$$dV_{m(\mathbf{r})} = \frac{d\mathbf{m}\bullet(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\pi\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3} = \frac{\mathbf{M}_{(\mathbf{r}')}\bullet\mathbf{R}dV'}{4\pi R^3}$$

Para un cuerpo de volumen total V

$$V_{m(\mathbf{r})} = \int_V \frac{\mathbf{M}_{(\mathbf{r}')}\bullet\mathbf{R}dV'}{4\pi R^3} \qquad (2.2)$$

Modificando (2.6) por identidades vectoriales se puede llegar a la expresión

$$V_{m(\mathbf{r})} = \oint_S \frac{\mathbf{M}_{(\mathbf{r}')}\bullet\mathbf{R}dS'}{4\pi R} + \int_V \frac{\left[-\nabla'\bullet\mathbf{M}_{(\mathbf{r}')}\right]dV'}{4\pi R} \qquad (2.3)$$

De donde puede establecerse una analogía formal entre los potenciales electrostático y escalar magnético, definiendo:

$$\rho_M = -\nabla\bullet\mathbf{M}' \qquad (2.4)$$

Como densidad volumétrica de carga magnética (polo magnético)

$$\sigma_M = \mathbf{M}\bullet\mathbf{n} \qquad (2.9)$$

Como densidad superficial de carga magnética (polo magnético)
Lo que resulta muy útil para la solución de problemas.

2.5 Campo Magnético en la Materia:

B puede hallarse como se dijo en ***2.3*** dentro y fuera del volumen del cuerpo. Puede demostrarse que B se halla en base a V_m, así:

$$\mathbf{B} = -\mu_0\nabla V_m \qquad (2.10)$$

$$\mathbf{B} = -\mu_0\nabla V_m + \mu_0\mathbf{M} \qquad (2.10)$$

2.5.1 Intensidad de Campo **H**:

La ec. (2.4) sugiere la introducción de una tercera magnitud vectorial llamada "intensidad de campo magnético" **H**, definido por:

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m \qquad (2.11)$$

Con iguales unidades que **M** (Amperio/metro)
Luego la ec. (2.9) toma la forma:

$$\mathbf{B} = \mu_0[\mathbf{H}_{(\mathbf{r})} + \mathbf{M}_{(\mathbf{r})}] \qquad (2.12)$$

Relación constitutiva
Nótese que $\mathbf{M}_{(\mathbf{r})} = 0$ fuera del cuerpo material.

2.5.2 Ecuaciones fundamentales:

Estas ecuaciones expresan el hecho fundamental que el campo **B** es producido tanto por las carga eléctricas libres como por las corrientes de magnetización (corrientes ligadas)

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J}+\mathbf{J_M}) \qquad (2.13)a$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad (2.5)b$$

Que se interpreta en el sentido que la intensidad de campo H se puede calcular sólo considerando la corriente eléctrica.
Las formas integrales correspondientes son:

$$\oint_\Gamma \mathbf{B}\bullet d\mathbf{l} = \mu_0\int_S (\mathbf{J}+\mathbf{J_M})\bullet d\mathbf{S} = \mu_0(I+I_M) \qquad (2.13)c$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{H}\bullet d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\bullet d\mathbf{S} = I \qquad (2.13)d$$

En función del concepto de "polos magnéticos" están las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\nabla\bullet\mathbf{H} = \rho_M \qquad (2.6)a$$

$$\nabla^2 V_m = -\rho_M \qquad (2.14)b$$

De donde se tiene la forma integral:

$$\oint_S \mathbf{H}\bullet d\mathbf{S} = \int_V \rho_M dV = Q_M \qquad (2.14)c$$

Notar analogía con la ley de Gauss.

Ejemplo 2.1:

Un imán permanente recto puede modelarse como un cilindro de radio a y longitud 2L, con magnetización uniforme M_0 en la dirección axial. Hallar V_m en puntos del eje así como **H** y **B**

Fig. 2.4 a

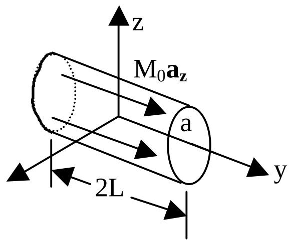
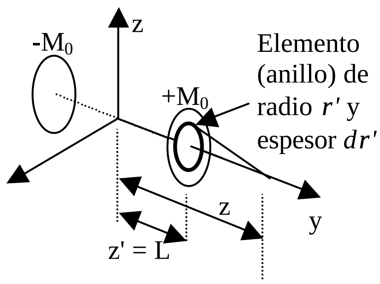


Fig. 2.4 b



Solución:

$$\rho_M = -\nabla'\bullet\mathbf{M} = 0$$

$$\sigma_M = \mathbf{M}\bullet\mathbf{n} = \begin{cases} -M_0 & z' = -L \\ 0 & r' = a \\ +M_0 & z' = +L \end{cases}$$

Superposición:

$$V_m = \frac{1}{4\pi}\int_{r'=0}^{a} \frac{M_0(2\pi r'dr')}{\sqrt{(z-L)^2 + r'^2}} - $$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{r'=0}^{a} \frac{M_0\left(2\pi r'dr'\right)}{\sqrt{(z+L)^2 + r'^2}}$$

$$V_m = \frac{M_0}{2}\left\{\left[\sqrt{(z-L)^2 + r'^2}\right]_{r'=0}^{a} - \left[\sqrt{(z+L)^2 + r'^2}\right]_{r'=0}^{a}\right\}$$

$$V_m = \frac{M_0}{2}\left\{\left[\sqrt{(z-L)^2+a^2}\right] - |z-L| - \left[\sqrt{(z+L)^2+a^2}\right] + |z+L|\right\}$$

$$V_m = \begin{cases} \dfrac{M_0}{2}\left[\sqrt{(z-L)^2+a^2} - \sqrt{(z+L)^2+a^2} + 2L\right] & z > L \\ \dfrac{M_0}{2}\left[\sqrt{(z-L)^2+a^2} - \sqrt{(z+L)^2+a^2} + 2z\right] & |z| < L \\ \dfrac{M_0}{2}\left[\sqrt{(z-L)^2+a^2} - \sqrt{(z+L)^2+a^2} - 2L\right] & z < -L \end{cases}$$

Notar la continuidad de V_m.

Calcularemos primero **H**: $\mathbf{H} = -\nabla V_m = -\dfrac{dV_m}{dz}\mathbf{a_z}$

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \dfrac{M_0}{2}\left[\dfrac{L-z}{\sqrt{(z-L)^2+a^2}} + \dfrac{z+L}{\sqrt{(z+L)^2+a^2}}\right]\mathbf{a_z} & |z| > L \\ \dfrac{M_0}{2}\left[\dfrac{L-z}{\sqrt{(z-L)^2+a^2}} + \dfrac{z+L}{\sqrt{(z+L)^2+a^2}} - 2\right]\mathbf{a_z} & |z| < L \end{cases}$$

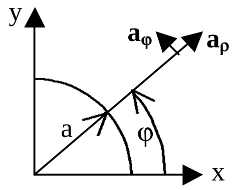
Ahora puede hallarse B usando:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} m_0\mathbf{H} & |z| > L \\ m_0(\mathbf{H} + M_0\mathbf{a_z}) & |z| < L \end{cases}$$

Ejemplo 2.2:

Un magneto cilíndrico de gran longitud y radio “a” está magnetizado perpendicularmente a su eje longitudinal; la magnetización es proporcional a la distancia al eje “y” y perpendicular a la dirección radial. Sabiendo que M = 10^{-4}a en la superficie hallar la expresión de **M** en coordenadas cilíndricas y cartesianas; calcular las densidades de corriente de magnetización y los campos **H** y **B**.

Fig. 2.5 a



Solución:

Según enunciado: $\mathbf{M} = k\,r'\mathbf{a}_{\ddot{o}} = 10^{-4}\,r'\mathbf{a}_{\ddot{o}}$

Transformando coordenadas:

$$\mathbf{M} = 10^{-4}\,r'(\cos j'\,\mathbf{a_y} - \sin j'\,\mathbf{a_x})$$

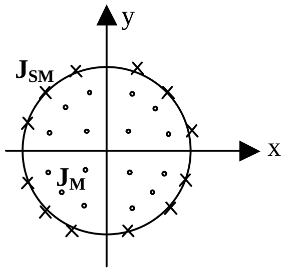
$$\mathbf{M} = 10^{-4}(x'\mathbf{a_y} - y'\mathbf{a_x})$$

De las ec. 2.4 y 2.5:

$$\mathbf{J_M} = \nabla'\times\mathbf{M} = 10^{-4}\begin{vmatrix} \mathbf{a_x} & \mathbf{a_y} & \mathbf{a_z} \\ \dfrac{d}{dx'} & \dfrac{d}{dy'} & \dfrac{d}{dz'} \\ -y' & x' & 0 \end{vmatrix} = 2\times10^{-4}\,\mathbf{a_z}$$

$$\mathbf{J_{SM}} = \mathbf{M}\times\mathbf{n}\Big|_{r'=a} = 10^{-4}a\,\mathbf{a}_{\ddot{o}}\times\mathbf{a}_{\tilde{n}} = -10^{-4}a\,\mathbf{a_z}$$

Fig. 2.5



Usando la ec. 2.13 c:

Para: ρ < a $\oint_\Gamma \mathbf{B}\bullet\mathbf{dl} = m_0\int_S \mathbf{J_M}\bullet\mathbf{dS}$

$$2pr\,B = m_0(2\times10^{-4})(pr^2)$$

$$\mathbf{B} = m_0(1\times10^{-4})\,r\,\mathbf{a}_{\ddot{o}}$$

Para: ρ > a:

$$2pr\,B = m_0\left[(2\times10^{-4})(p\,a^2) - (10^{-4}a)(2p\,a)\right] = 0$$

$$\therefore\quad \mathbf{B} = 0$$

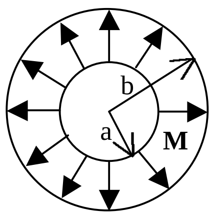
Ahora se puede calcular **H**: $\mathbf{H} = \dfrac{\mathbf{B}}{m_0} - \mathbf{M} = 0$, en todo el espacio

Ejemplo 2.3:

Cierto magneto (en forma de esfera hueca), posee **M** = k **r’**. Hallar:

a) Densidades de polo magnético
b) **H** y **B** en todo el espacio.

Fig. 2.6



Solución:

De la fig. 2.6 se tiene: $\mathbf{n} = \begin{cases} -\mathbf{a_r}\big|_{r'=a} \\ +\mathbf{a_r}\big|_{r'=b} \end{cases}$

$$r_M = -\nabla'\bullet\mathbf{M} = -\frac{1}{r'^2}\left[\frac{d}{dr'}(r'^2\,kr')\right] = 3k$$

$$s_M = \mathbf{M}\bullet\mathbf{n} = \begin{cases} -ka & r' = a \\ +kb & r' = b \end{cases}$$

Usando la ley de Gauss: $\oint_S \mathbf{H}\bullet\mathbf{dS} = Q_{M(en\,S)}$

Para r < a : $Q_M = 0 \quad\rightarrow\quad \mathbf{H} = 0$

a < r < b : $\oint_S \mathbf{H}\bullet d\mathbf{S} = 4\pi r^2 H$ simetría esférica

$$Q_M = -3k\left[(\tfrac{4}{3}\pi)(r^3 - a^3)\right] - ka\left[4\pi a^2\right]$$

Igualando: $H = \dfrac{Q_M}{4\pi r^2} = -kr \quad \rightarrow \quad \mathbf{H} = -k\mathbf{r}$

B < r :

$$Q_M = -3k\left[(\tfrac{4}{3}\pi)(b^3 - a^3)\right] - ka\left[4\pi a^2\right] + kb\left[4\pi b^2\right] = 0$$

$Q_M = 0$ (Siempre la Q_M total de un cuerpo es cero)

$$\therefore \quad \mathbf{H} = 0$$

Para hallar **B**: $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ que es cero en el exterior del magneto y también en el interior porque $\mathbf{M}_{(\mathbf{r})} = \mathbf{M}_{(\mathbf{r}')}$ allí.

Ejemplo 2.4:

Se fabrica un imán en forma de segmento esférico, con una magnetización uniforme y perpendicular a la base del segmento. Encontrar **B** en el centro de la esfera a la cual pertenece el segmento y cuyo radio es "a".

Fig. 2.7 a

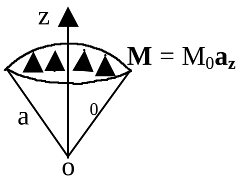
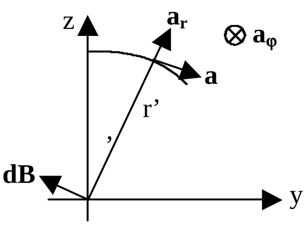


Fig. 2.7 b



Solución:

$$\mathbf{J_M} = \nabla' \times \mathbf{M} = 0$$

$$\mathbf{J_{SM}} = \mathbf{M} \times \mathbf{n} = \begin{cases} 0 & \mathbf{n} = -\mathbf{a_z} \\ M_0 \sin\theta' \mathbf{a_\phi} & \mathbf{n} = \mathbf{a_r} \end{cases}$$

De la ec. 1.7 : $\mathbf{dB} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{J_{SM}\, \mathbf{a_t} \times \mathbf{a_R}}{R^2} dS'$

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{M_0 \sin\theta' \mathbf{a_\phi} \times (-\mathbf{a_r})}{a^2}\right] a^2 \sin\theta' d\phi' d\theta'$$

$\mathbf{dB} = \dfrac{\mu_0 M_0}{4\pi} \sin^2\theta'(-\mathbf{a_\theta}) d\phi' d\theta'$, por simetría sólo existe la necesidad de considerar $\mathbf{dB_z}$:

$$\mathbf{dB_z} = \frac{\mu_0 M_0 \sin^3\theta' d\phi' d\theta'}{4\pi} \mathbf{a_z}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi} \mathbf{a_z} \int_{\theta'=0}^{\theta_0} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \sin^3\theta' d\phi' d\theta'$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 M_0}{6} \mathbf{a_z}\left[2 - 3\cos\theta_0 + \cos^3\theta_0\right]$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$$

Ejercicio: Repetir este problema usando "cargas magnéticas" y ley de Coulomb.

2.6 Clasificación de la materia por sus propiedades magnéticas:

2.6.1 Materiales diamagnéticos:

En un material diamagnético los átomos no poseen magnetización permanente en ausencia de campo exterior.

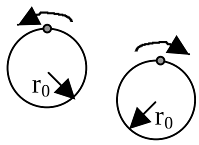
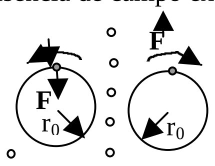


Fig. 2.8



$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ B

$\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

Dos electrones en órbitas iguales girando en sentidos opuestos con idéntica velocidad

$$\sum \mathbf{m} = 0$$

Cada electrón experimenta la fuerza F, una de ellas aumentará y la otra disminuirá, entonces

$$\sum \mathbf{m} \neq 0$$

Macroscópicamente, esto resulta en una magnetización inducida opuesta a **B**: $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ (2.15)

χ_m es una constante negativa y mucho menor que la unidad, característica de cada material o sustancia.

Ejemplos:

Materiales	χ_m
Bismuto	-1.66×10^{-5}
Plata	-2.6×10^{-5}
Oro	-3.6×10^{-5}

$$\chi_{\text{MKSA}} = (\chi_{\text{gausiano}})(4\pi)$$

2.6.2 Materiales paramagnéticos:

Sus átomos tienen magnetización permanente, pero no están alineados, de tal forma que en ausencia de campo externo su magnetización es cero.

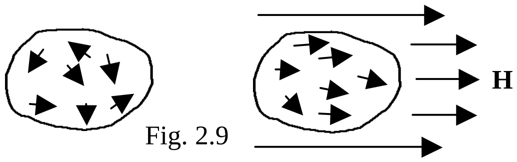


Fig. 2.9

$\sum \mathbf{m} = 0$ $\qquad$ $\sum \mathbf{m} \neq 0$

$\mathbf{M} = 0$ $\qquad$ $\mathbf{M} \neq 0$

Teóricamente, los dipolos deberían girar hasta ser paralelos a **H**; debido a otras interacciones no magnéticas ello sólo ocurre parcialmente. Vale la ec. 2.15, pero χ_m es positivo y varía con la temperatura.

Ejemplos:

Materiales	χ_m
Magnesio	1.2×10^{-5}
Aluminio	2.3×10^{-5}
Tungsteno	6.8×10^{-5}

De las ec. (2.12) y (2.15)

$$\mathbf{B} = \mu_0(1+\chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$$

$$\mu = \mu_0(1+\chi_m)\mathbf{H} \qquad (2..16)a$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1+\chi_m \qquad (2.16)b$$

Para los materiales aquí tratados (no magnéticos) μ es aproximadamente constante.

2.7 Ferromagnetismo y los materiales magnéticos:

Tres sustancias Fe, Co, Ni o aleaciones con estos elementos tienen átomos que poseen magnetización permanente, pero tal magnetización no es orbital sino que se debe al SPIN electrónico. Así pueden tener magnetismo sin **H** exterior (**M** espontánea)

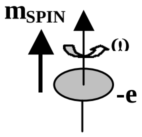


Fig. 2.10

$\mathbf{m}_{SPIN}$ puede ser hacia arriba (UP) o hacia abajo (DOWN); se puede imaginar al electrón como una esfera cargada en rotación.

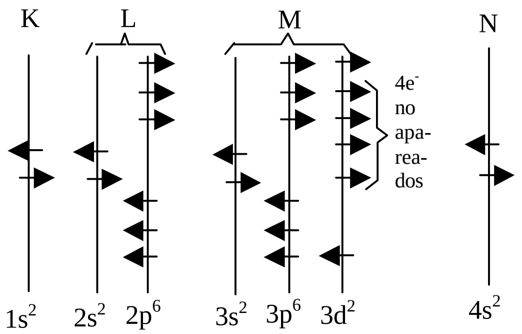


Fig. 2.11 Configuración electrónica del átomo de Fe (26 electrones) por capas

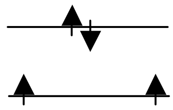
Notar los electrones ferromagnéticos y los electrones de conducción.

2.7.1 Teoría de los Dominios:

Según el modelo de la fig 2.1b en un material ferromagnético las $\mathbf{m}_i$ con igual dirección determinan regiones llamadas "dominios magnéticos" (su volumen es del orden de 10^{-8} a 10^{-12} m^3 y contiene de 10^{17} a 10^{21} átomos). La formación de tales dominios es consecuencia del balance entre cuatro energías con el fin de tener un sistema en el estado de energía mínima total:

$$U_{total}=U_{intercambio}+U_{magnética}+U_{anisotrópica}+U_{magnetoestricción}$$

Energía de Intercambio: depende de la interacción SPIN-SPIN. De acuerdo con el principio de exclusión dos electrones con igual SPIN no pueden ocupar la misma región del espacio.



Par antiparalelo ($\mathbf{m}_{neto} = 0$)

Par paralelo ($\mathbf{m}_{neto} \neq 0$)

Fig. 2.12

Los electrones de las capas externas de átomos adyacentes tienden a formar pares antiparalelo; notar que en el caso del Fe los electrones ferromagnéticos están en las capas interiores, lo que les impide formar dichos pares. Esta energía es mínima cuando las **m** son paralelas.

Energía magnetostática: Esta energía está en el campo **H** que produce el material fuera de él (Cap. 5); es mínima cuando las líneas de fuerza de **M** son continuas.

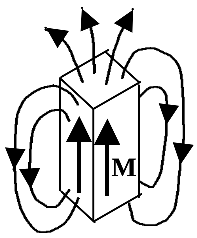


Fig. 2.13a

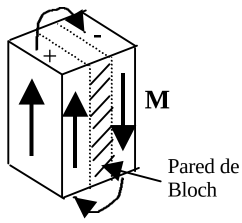
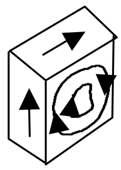


Fig. 2.13b



Arreglo de materiales magnéticos en lazo cerrado (dominio continuo)

Fig. 2.13c

Un bloque uniformemente magnetizado (SPINs paralelos) minimiza la energía de intercambio pero maximiza el campo **H** y la $U_{magnetostática}$. Fig. 2.13

La división en 2 dominios minimiza la $U_{magnetostática}$.

Energía anisotrópica: La anisotropía magnética es la preferencia de los momentos magnéticos para alinearse con los ejes del cristal.

Un cristal de Fe colocado entre los polos de un imán se alinea paralelo a alguno de sus ejes [001] para minimizar la energía Fig. 2.14 a

Para minimizar la energía anisotrópica la configuración de 2.13c, adquiere dominios discretos.
Fig. 2.14b

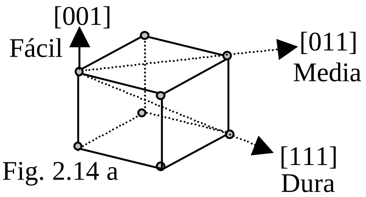


Fig. 2.14 a

Cristal B.B.C. de Fe

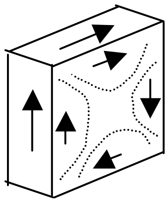
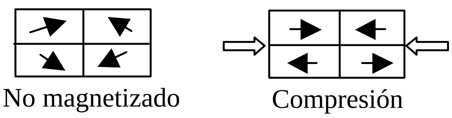
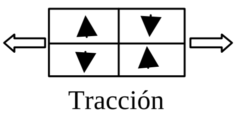


Fig. 2.14b

Energía de magnetoestricción: Este fenómeno consiste en la deformación de un cristal para aliviar el esfuerzo mecánico que experimenta en un campo magnético; si un cristal es comprimido su magnetización también se afecta.





Resultado final del balance magnético para alcanzar el mínimo.

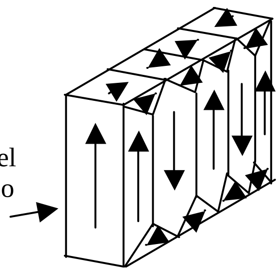
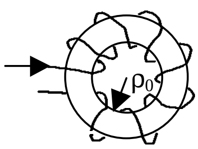


Fig. 2.15

2.7.2 Curva de Magnetización:

Para una relación práctica entre **B** y **H** en los materiales ferromagnéticos altamente no lineales se usa la gráfica conocida con este nombre.



Muestra de Fe en forma toroidal (anillo de Rowland)
Fig. 2.17

Asumiendo sección recta S pequeña comparada con ρ_0 (radio medio):

$$H = \frac{NI}{2\pi r_0} \quad \rightarrow \quad B = \frac{\Phi_m}{S}$$

Un fluxímetro permite medir Φ_m y calcular **B**; así se obtiene pares de valores (B,H) para cada valor de I_{dc}. El anillo debe ser previamente calentado (recocido) para asegurar que $\mathbf{M}_{inicial} = 0$

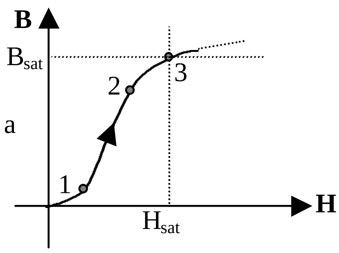


Fig. 2.18 a

Curva de magnetización típica del Fe

$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ permite hallar la **M** correspondiente.

El tramo de 1 a 2 es casi lineal.

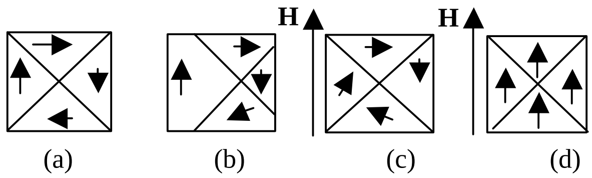


Fig. 2.18 b

(a) $\mathbf{H} = 0, \quad \sum \mathbf{M}_i = 0$

(b) Hasta el punto 2 se tiene la magnetización por crecimiento del dominio. (proceso reversible), región de fácil magnetización.

(c) A partir del punto 2 se produce la magnetización por rotación de dominio (irreversible), difícil magnetización

(d) Al llegar al punto 3 **M** alcanza $\mathbf{M}_{sat}$.

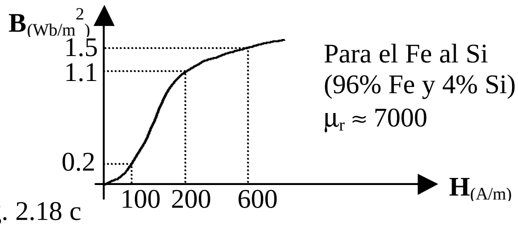


Fig. 2.18 c

2.7.3 Lazo de Histéresis:

La excitación del anillo de Rowland con I_{ac} se obtiene el llamado "lazo de histéresis".

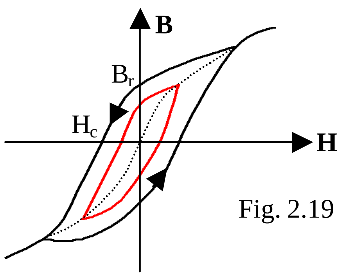


Fig. 2.19

— Curva principal (de saturación)
— Curvas secundarias
… Curva de magnetización normal
B_r = inducción retentiva o remanente
H_c = intensidad coercitiva

Este proceso de magnetización periódica consume energía, que se manifiesta como calor (pérdidas por histéresis); se tratará en el capítulo 5.

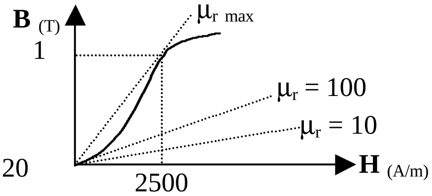


Fig. 2.20

$$m_{r_a} = \frac{B}{m_0 H}$$ de amplitud

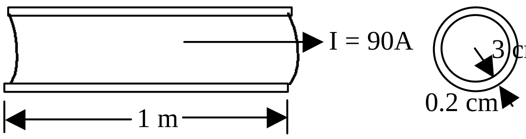
$$m_{r_p} = \frac{\Delta B}{m_0 \Delta H}$$ incremental

$$m_{r_0} = \lim_{H\to 0} \frac{B}{m_0 H}$$ inicial

Ejemplo 2.5:

Determinar la μr de una cáscara cilíndrica de Fe colado (CAST IRON) muy larga, en el sistema de la fig. 2.21 a

Fig. 2.21 a



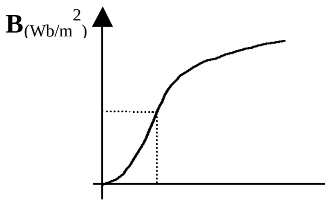


Fig. 2.21b

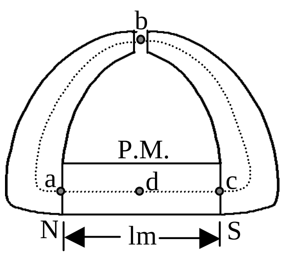
El campo H es: $H = \frac{I}{2pr}\Big|_{r=0.03m} = 478\text{A/m}$

Tanto en el aire como en el fierro.
De la curva en la Fig 2.21 b para H = 478 A/m tenemos: B = 0.31 Wb/m^2; entonces:

$$m_{r_a} = \frac{B}{m_0 H} = \frac{0.31}{4p10^{-7}\times 478} = 516$$

Ejemplo 2.6:

Circuitos magnéticos con imanes permanentes



Am: Sección recta de PM

Fig. 2.22 a

Solución:

$$\oint_{abcda} \mathbf{H}\bullet d\mathbf{l} = 0$$

$$\oint_{abc} \mathbf{H}\bullet d\mathbf{l} = -\oint_{cda} \mathbf{H}\bullet d\mathbf{l}$$

Nótese que en el tramo abc vale una relación lineal:

$$\mathbf{B} = m\mathbf{H} \quad \rightarrow \quad \Phi_m = BA = \text{cte}$$

$$\Phi_m \int_{abc} \frac{dl}{mA} = -\int_{cda} \mathbf{H}\bullet d\mathbf{l}$$

$$\Phi_m \quad _{abc} = -H_m lm$$

$$B_m Am \quad _{abc} = -H_m lm \rightarrow \ldots \quad (i)$$

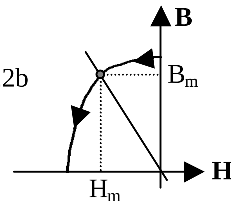
De la fig. 2.22 a:

$$_{abc} = \underbrace{\frac{l_i}{m_i A_i}}_{\text{piezas polares}} + \underbrace{\frac{l_g}{m_0 A_g}}_{\text{gap}} \simeq \frac{l_g}{m_0 A_g} \quad \ldots \quad (ii)$$

Reemplazando (*ii*) en (*i*): $B_m = -\left(\frac{lmA_g}{l_g Am} m_0\right) H_m$

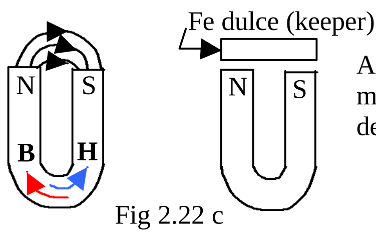
Recta desmagnetizante

Fig. 2.22b



Notar la determinación del "punto de trabajo" usando la recta desmangnetizante sobre la "curva de desmagnetización" del P.M.
La cifra o figura de mérito importante para un P.M. es el producto $H_m B_m$; debe ser lo mayor posible. Para el Alnico 5 $BH_{máx} \approx 30,000\,\text{Jm}^{-3}$, para $B \simeq 1\text{T}$

Para conservar bien un P.M.



Así el H desmagnetizante decrece

Fig 2.22 c

Ejemplo 2.7:

Un transformador de poder diseñado correctamente para operar a 110V, 440 Hz. ¿operará bien a 110V, 60 Hz?

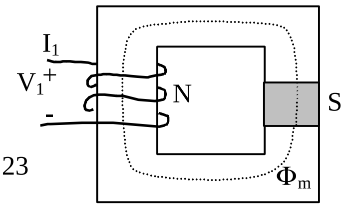


Fig. 2.23

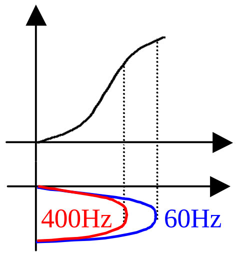
Asumimos:

$$\Phi_m = \Phi_0 \,\text{sen}\, wt$$

$$\text{fem} = N\left|\frac{d\Phi_m}{dt}\right| = Nw\,\Phi_0\cos wt$$

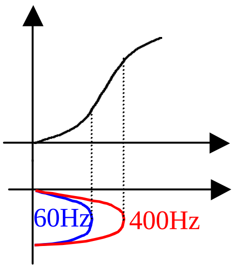
$$V_{RMS} = \frac{N(2p\,f)\Phi_0}{\sqrt{2}} = 4.44Nf\,SB_{máx}$$

Como el V_{RMS} no cambia, luego si la frec. decrece $B_{máx}$ debe aumentar en el factor de 440/60 = 7.33



Al transfo le falta Fe para funcionar a 60 Hz; debe aumentarse S

Fig. 2.23



En el caso opuesto (bien diseñado para 60 Hz), Bmáx debe decrecer el mismo factor, el transfo "tiene mucho Fe" para 440 Hz, debe reducirse S

Apéndice:

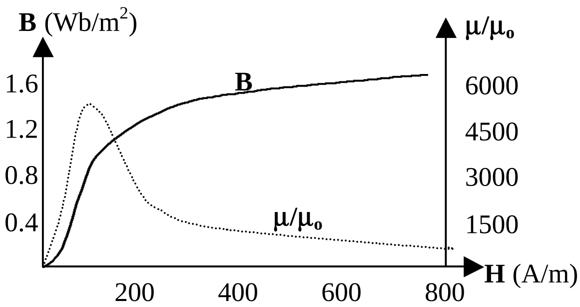


Fig. 2.24 Curva de Magnetización del material

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{B} &= m_{(\mathbf{H})}\mathbf{H}\\ m_{(\mathbf{H})} &= \frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta\mathbf{H}}\end{aligned}\right\}\qquad (2.7)\text{a y b}$$

Se observa que el proceso no es lineal y μ es función de H μ = $\mu_{(H)}$ normalmente es tomada como la pendiente de la curva $m = m_{(\mathbf{H})} = \dfrac{\mathbf{dB}}{\mathbf{dH}}$

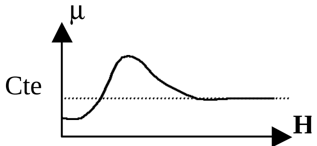


Fig. 2.25

Aplicación de **H** alterna a un material magnético:

$$\Phi_m = \frac{m\,NIS}{2p\,r_0},\ \text{donde}\ 2p\,r_0 = l \qquad (l = \text{longitud media del anillo})$$

Así $\Phi_m = \left(\dfrac{mS}{l}\right)NI$, equivalente a la ley de Ohm

La constante de proporcionalidad entre Φ_m y NI se llama "permeancia magnética"

$$P = \frac{mS}{l}$$

Su recíproco es la reluctancia magnética

$$R = \frac{1}{P} = \frac{l}{mS}$$

El producto NI es análogo a un voltaje eléctrico y se denomina "fuerza magnetomotriz" $F = NI$

Con unidades A×Vuelta.

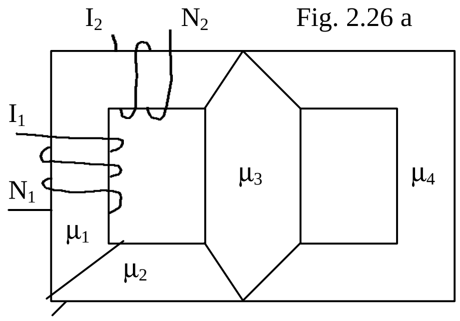


Fig. 2.26 a

Sea el siguiente un circuito magnético

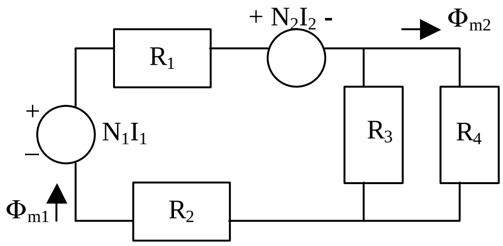


Fig2.26b

$$R_i = \frac{l_i}{m_i S_i}$$

Las leyes de Kirchof son:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} R_i\Phi_{mi}$$

(Malla magnética)

$$\sum_{i=1}^{n}\Phi_{mi} = 0$$

(Nodo magnético)

Con este método se calculan los valores promedios de las magnitudes.